

Análise Matemática IV

Problemas para as Aulas Práticas

2 de Maio de 2005

Semana 8

1. Para cada uma das seguintes equações diferenciais, esboce o campo de direcções e trace os respectivos tipos de soluções .

$$(a) \ y' = \frac{ty}{1+t^2}, \quad (b) \ y' = (2-y)(y-1),$$

$$(c) \ y' = y(1-y^2), \quad (d) \ y' = \frac{y+t}{y-t},$$

2. Mostre que existe uma solução de classe C^1 para o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = 6t\sqrt[3]{y^2} \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

diferente da solução $y(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Explique porque é que isto não contradiz o teorema de Picard.

3. Mostre que o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = y^{1/2} \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

tem infinitas soluções, e explique porque esse facto não contradiz o Teorema de Picard.

4. Considere o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} (1-t)y \frac{dy}{dt} = 1-y^2 \\ y(1/2) = 2, \end{cases}$$

- (i) Determine uma solução do PVI, e justifique que essa é a única solução do problema definida para t numa vizinhança de $1/2$.
 - (ii) Mostre que o PVI admite um número infinito de soluções definidas em \mathbb{R} .
 - (iii) Diga, justificando, porque não há contradição ao Teorema de Picard.
5. Mostre que o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = \frac{1}{3y^2 + \sqrt[3]{(t+1)^2}} \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

tem uma única solução $y(t)$, definida para $t \in [0, +\infty[$, e calcule $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t)$.

Sugestão: Não tente resolver a equação diferencial. Considere a função $u(t)$ definida por

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \frac{1}{3u^2} \\ u(0) = 1. \end{cases}$$

Uma vez determinada a função $u(t)$, mostre que

$$\frac{dy}{dt} \geq \frac{1}{3(u(t))^2 + \sqrt[3]{(t+1)^2}},$$

e integre esta relação entre 0 e t .